FUNCIONES

1.- CONCEPTO DE FUNCIÓN.

El concepto de función es, posiblemente, el concepto más importante de todas las matemáticas.

Con una función lo que queremos es emparejar los elementos de un conjunto con los elementos de otro, siguiendo un determinado criterio.

Se trata, sin embargo, de un concepto muy amplio y nosotros sólo nos vamos a centrar en el estudio de unas funciones muy particulares; aquellas que se refieren a los números reales, es decir, de una forma coloquial, una **FUNCIÓN** es una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales otro número real.

Debe quedar claro que una función es una regla cualquiera que no tiene por qué ser expresada mediante una fórmula matemática, ni siquiera tiene por que ser una regla a la que sea posible encontrar una aplicación en la práctica.

Vamos a poner un ejemplo para intentar que el concepto quede más claro y para ir introduciendo la terminología que utilizaremos en este tema:

EJEMPLO: Supongamos que con una determinada compañía de teléfonos tenemos contratado un determinado servicio con la siguiente tarifa:

además del establecimiento de llamada que es de 0'12 €.

Nos preguntamos si sería posible conocer lo que nos va a costar una llamada antes de que recibamos la factura.

Evidentemente, el precio de esa llamada dependerá del tiempo que dure la conversación.

Así, si hablamos durante 15 min. tendríamos que pagar a la compañía telefónica un total de:

$$0'12 \quad + \quad 15 \cdot 0'03 \quad = \quad 0'57 \ €$$

El TIEMPO que ha durado la conversación es una cantidad variable (que varía), pero no depende de ninguna de las otras cantidades que aparecen en el planteamiento del problema. Es una cantidad variable **INDEPENDIENTE**

El PRECIO FINAL de la llamada es otra cantidad variable, pero ésta DEPENDE del tiempo que haya durado la conversación. Es una cantidad variable **DEPENDIENTE**

0'12 y 0'03 son los precios que el operador tiene establecidos en el contrato como tarifas. Son cantidades fijas, constantes, que no varían.

En general, si llamamos t ≡ "tiempo que dura la llamada de teléfono"
p ≡ "precio de la llamada"

podremos calcular lo que nos cuesta una llamada, conociendo el tiempo que ésta ha durado, a través de la siguiente expresión algebraica o fórmula:

$$\boxed{p = 0'12 + 0'03 \cdot t}$$

Esta fórmula es la "regla" que nos permite asociar o emparejar un número (el tiempo que ha durado la llamada) a otro número real (el precio final de la llamada). Es lo que conocemos con el nombre de FUNCIÓN y podríamos decir que esta expresión matemática "nos permite conocer el valor del precio de una llamada ***en función*** del tiempo que dura la conversación".

En este ejemplo, hemos utilizado dos cantidades variables. Una de ellas, el tiempo, era INDEPENDIENTE, no dependía de ningún otro de los elementos que intervenían en el problema. La otra variable, el precio final, era DEPENDIENTE; su valor depende de lo que valga el tiempo, depende del tiempo que ha durado la llamada.

Normalmente, a la variable independiente la vamos a representar utilizando la letra " x " y a la variable dependiente utilizando la letra " y ".

De esta forma, y siguiendo el convenio, la función de nuestro ejemplo se escribiría de la forma:

$$\boxed{y = 0'12 + 0'03 \cdot x}$$

(Observemos que al escribir la función de esta forma, ha aparecido la forma explícita de la ecuación de la recta, lo que nos permite saber muchas cosas acerca de nuestra función, como, por ejemplo, su gráfica)

No podemos continuar hablando de funciones sin antes introducir una notación adecuada (sistema de signos convencionales que se adopta para expresar conceptos matemáticos, físicos, químicos, etc. "Diccionario de la Lengua Española" de la Real Academia Española).

Puesto que de ahora en adelante vamos a trabajar continuamente con funciones, hace falta introducir una forma adecuada de referirnos a ellas. La práctica aconseja nombrar a las funciones mediante una letra. Por razones evidentes, se emplea normalmente la f, lo cual hace que sigan en orden de preferencia las letras g y h, pero tiene que quedar claro que esto es sólo un convenio, y que podemos utilizar cualquier letra o, incluso, otro símbolo, incluidas la x y la y, si bien estas letras se reservan habitualmente para nombrar las variables independientes (x) y la dependiente (y).

Si f es la función, entonces el número que emparejamos con un número x (un valor dado a la variable independiente) será f(x). Este número f(x), que es la pareja asociada a x a través de la función, se llama ***IMAGEN*** de x.

Este símbolo f(x), se lee " f de x " y es la imagen de x a través de la función f.

En nuestro ejemplo, 0’57 € es la imagen de 15 min., porque 0’57 es el valor que hemos asociado a 15. Se representaría como f(15) = 0’57.

De esta forma hemos obtenido una pareja de números, que podemos representar mediante un par ordenado de números: (15 , 0’57)

Recordemos que nuestra función era: $y = 0'12 + 0'03 \cdot x$

Con el convenio que hemos utilizado para nombrar a las funciones, se quedaría escrita como:

$$\boxed{f(x)} = 0'12 + 0'03 \cdot \boxed{x}$$

Imagen de x
Variable dependiente

Variable independiente

$$f(\,15\,) = 0'12 + 0'03 \cdot 15 = 0'57\ €$$

De esta forma vamos a representar al valor que le corresponde a 15 min. Es la imagen de 15 y vale 0’57 €

(15 , 0’57)

<u>Variable independiente</u>

A este nº, que depende del valor que toma la variable independiente y que hemos calculado utilizando la función, lo llamaremos **<u>imagen de x a través de la función</u>**..
En nuestro ejemplo, 0’57 es la imagen de 15 y lo representaremos como f (15) = 0’57

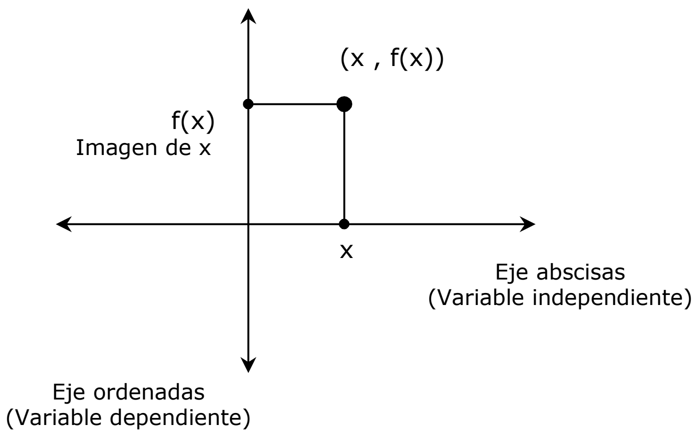
Ahora estamos en condiciones de ampliar el concepto de función y dar una definición más rigurosa de la misma, sin emplear términos como “regla”, asociación”, “emparejamiento”. Lo que hacemos es preguntarnos qué es lo que realmente me falta saber acerca de una función para saber absolutamente todo referente a ella. La contestación es fácil, para todo número x hay que saber quien es su imagen.

<u>DEFINICIÓN</u>: Una **<u>FUNCIÓN</u>** es una colección de pares ordenados de números que cumplen la siguiente propiedad:
“Si (a,b) y (a,c) pertenecen a la colección de pares de números de la forma (x, f(x)), entonces b = c”

Es decir, al elemento “ a “ sólo puedo emparejarlo con otro número que será único para ese “ a “. En otras palabras, cada valor de x sólo puede tener una única imagen.

El conjunto de los números a los cuales se aplica una función, los números a los que podemos buscarles una imagen, recibe el nombre de dominio.

Todas estas parejas que se pueden formar gracias a la función que hemos llamado f(x) se pueden representar en un gráfico, tomando un eje de coordenadas cartesianas y situando los valores que le demos a la variable independiente en el **eje horizontal o de abscisas**, y dibujando las imágenes sobre el **eje vertical o de ordenadas**.



Una vez representados todos los puntos o "parejas" tomados de la función f(x), podemos unirlos mediante una línea. Esta línea es lo que llamaremos **Gráfica de la función**, es decir, la gráfica es la línea que resulta al unir todos los puntos de la forma (x , f(x))

Para resumir y repasar un poco todo lo que llevamos visto hasta ahora vamos a comparar una función con una máquina en la que se distingue una entrada y una salida; para cada número real que se introduce en la entrada, la función produce un único número real en la salida.

Los elementos que entran forman el dominio. Los elementos que salen (las imágenes) forman el recorrido.

ENTRADA --------- $\boxed{f(x) = 0'12 + 0'03 \cdot x}$ ---------- SALIDA
(dominio) (recorrido)

x $\longrightarrow$ f (x)
(imagen de x)

ejemplo:

15 min $\boxed{f(15) = 0'12 + 0'03 \cdot 15 = 0'57\ €}$ f (15) = 0'57 €

0'57 es la imagen de 15

2.- DOMINIO DE UNA FUNCIÓN.

Aunque hemos indicado al principio del tema que una función no tiene por qué ser expresada mediante una expresión algebraica, la mayoría de las funciones con las que vamos a trabajar en el bachillerato sí van a ser expresadas a través de operaciones matemáticas.

Pero hay algunas operaciones en matemáticas que no siempre se pueden realizar, como la de dividir entre 0 ó la de calcular la raiz cuadrada de un número negativo.
En estos casos, habrá números a los que no podremos calcularle una imagen.
Pretendemos averiguar desde el primer momento a qué números podemos o no calcularles la imagen.

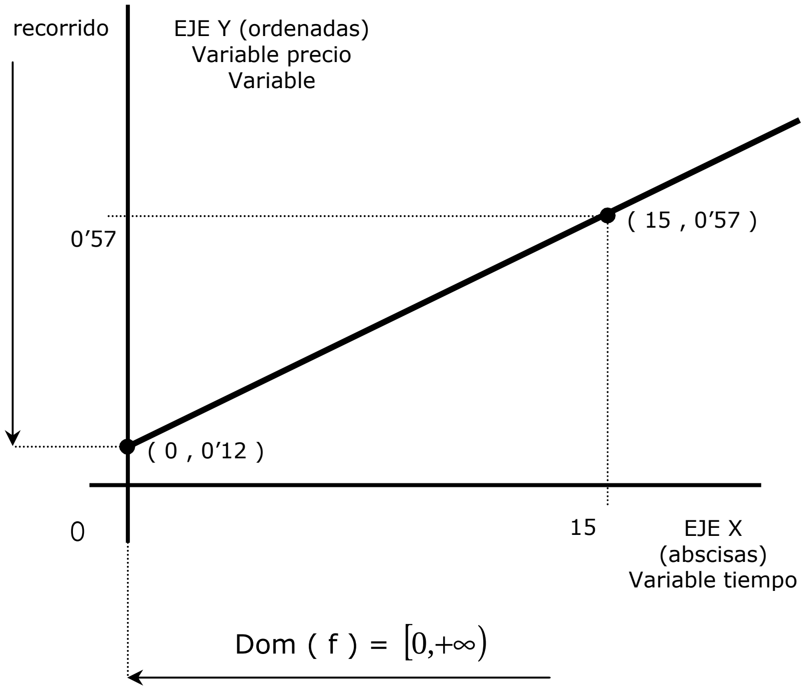
Así, se llama **DOMINIO DE UNA FUNCIÓN** al conjunto formado por todos aquellos números que tienen imagen.
A este conjunto lo representaremos por Dom(f)

Se llama **RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN** al conjunto formado por todas las imágenes de una función.

EJEMPLO: En nuestro ejemplo, f (x) = 0'12 + 0'03 · x , el dominio sería el conjunto $[0,+\infty)$ porque la variable independiente, la x , representa el tiempo que dura una llamada telefónica y ésta sólo puede durar una cantidad positiva de minutos, el caso más extremo sería que durara 0 minutos (llamar, descolgar e inmediatamente colgar).
Matemáticamente hablando no hay ningún inconveniente que impida realizar alguna de las operaciones que aparecen en la función.

Con lo cual, Dom (f) = $[0,+\infty)$
El recorrido sería el conjunto $[0'12,+\infty)$
(si no entiendes porqué este es el recorrido, prueba a realizar la gráfica de la función, te ayudará a entenderlo y te servirá de repaso de todo lo que llevamos)

Y = 0'12 + 0'03 x	
x	f(x)
0	0'12
15	0'57



Toda la información que sabemos acerca de la función la representaremos de la siguiente manera:

$$f : [0,+\infty) \longrightarrow [0'12,+\infty)$$
$$x \longmapsto f(x) = 0'12 + 0'03 \cdot x$$

EJEMPLOS: Calcula el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
(b) $g(x) = \sqrt{x-2}$
(c) $h(x) = \ln(x-1)$
(d) $k(x) = x^2 + x - 1$

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ Se trata de una función <u>RACIONAL</u> porque es una división de polinomios

Vamos a calcular la imagen de algunos números elegidos al azar:

- Por ejemplo: x = 0 ------ Imagen de 0 ≡ $f(0)$ --------- $f(0) = \dfrac{1}{0-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$

$f(0) = -1$ la imagen de 0 es (-1)

(0 , -1) pertenece a la función

0 pertenece al dominio de la función porque tiene imagen: $0 \in Dom(f)$
-1 pertenece al recorrido de la función porque es una imagen

- ¿Cuál es la imagen de x = -1?

x = -1 --------- Imagen de (-1) ≡ $f(-1)$ ------------ $f(-1) = \dfrac{1}{(-1)-1} = \dfrac{1}{-2} = \dfrac{-1}{2}$

$f(-1) = \dfrac{-1}{2}$ la imagen de (-1) es $\frac{-1}{2}$

(-1 , $\frac{-1}{2}$) pertenece a la función

-1 pertenece al dominio de la función porque tiene imagen: $-1 \in Dom(f)$
$\frac{-1}{2}$ pertenece al recorrido de la función porque es una imagen

- ¿Cuál es la imagen de x = 1?

x = 1 ----------- Imagen de 1 $\equiv f(1)$ ------------- $f(1)=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}$ <u>no se puede hacer la división</u>

No he podido calcular la imagen de 1 porque me he encontrado con una operación matemática que no se puede hacer.

1 no tiene imagen, 1 no pertenece al dominio de la función: $1 \notin Dom(f)$

En definitiva, y a poco que lo pensemos un poco, $Dom(f)=\Re-\{1\}$, porque sólo en 1 nos podemos encontrar con una operación matemática imposible de realizar.

(b) $g(x)=\sqrt{x-2}$

Como en el caso anterior vamos a calcular algunas imágenes de algunos números elegidos al azar:

- Por ejemplo, vamos a calcular la imagen de 2.

x = 2 ------ ¿cuánto vale la imagen de 2 a través de la función g? ------ $g(2)=\sqrt{2-2}=0$

$g(2)=0$ la imagen de 2 es 0

(2 , 0) pertenece a la función g

$2 \in Dom(g)$ porque es un número que tiene imagen

$0 \in Recorrido(g)$ porque es la imagen de un

- Vamos a calcular la imagen de x = 0

x = 0 ----------- Imagen de 0 $\equiv g(0)$ ----------- $g(0)=\sqrt{0-2}=\sqrt{-2}$ no se puede calcular en el conjunto de los números reales.

$0 \notin Dom(g)$ porque es un número que no tiene imagen

Cuando he intentado calcular la imagen de 0 me he encontrado con una operación matemática imposible de realizar (dentro del conjunto de los números reales, no es posible calcular la raiz cuadrada de un número negativo).

Se podría pensar que lo que ha ocurrido es "por culpa" del 0 (algunas veces parece que el 0 es un número especial) ó que es algo aislado como ocurrió en el ejemplo anterior. Observemos también que 0 no es un número negativo y que, por tanto, no había motivos para pensar que no íbamos a poder calcular la raiz cuadrada.

Que no hayamos podido hallar una imagen para 0 no tiene nada que ver con nada de lo que acabamos de comentar.

Lo que ha ocurrido es algo que se va a repetir siempre que, al sustituir la x por un número, nos encontremos con que el número x – 2 es un número negativo, porque a continuación habría que calcular la raiz cuadrada y eso no será posible.

Por tanto, la cuestión es encontrar los valores de la x que hacen que el radicando, x–2 , es un número positivo o cero, que son los números a los que sí les podemos calcular la raiz cuadrada.

Matemáticamente:

$$Dom(g) = \{x \in \Re / x-2 \geq 0\}$$

Por tanto, para calcular el dominio de nuestra función, tendremos que resolver la siguiente inecuación: $x-2 \geq 0$

$x-2=0$
$x=2$

	$\boxed{x < 2}$		$\boxed{x > 2}$
	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
Elegimos los valores:	x = 0		x = 3
	$x-2 \geq 0$		$x-2 \geq 0$
	0 – 2 = -2 <		3 – 2 = 1 > 0
	NO PERTENECEN AL DOMINIO		<u>SÍ PERTENECEN AL DOMINIO</u>

$$Dom(g) = \{x \in \Re / x-2 \geq 0\} = [2, +\infty)$$

También podemos escribir el dominio de la función g indicando aquellos números que no pertenecen a él, aquellos números a los que no les podemos calcular la imagen, es decir, $Dom(g) = \Re - \underbrace{\{x \in \Re / x-2 < 0\}} = \Re - \underbrace{(-\infty, 2)}$

Estos son los números que no pertenecen al dominio porque no tienen imagen. Es otra manera de representar al dominio de g

(c) $h(x) = \ln(x-1)$

Si nos fijamos en los dos ejemplos anteriores, vemos que el cálculo del dominio depende de aquellas operaciones que no son posibles realizar en matemáticas o, como en el ejemplo de las llamadas telefónicas, depende del contexto del problema.

Entonces, tenemos que preguntarnos, para calcular el dominio de h(x), en qué casos no podríamos calcular el logaritmo neperiano de un número.

No podríamos calcularlo si x – 1 fuese o un número negativo ó 0, o dicho de otra manera, sólo podremos calcular la imagen de un número x , si (x – 1) es un número positivo.

Matemáticamente:

$Dom(h) = \{x \in \Re / x - 1 > 0\}$

Resolvemos la inecuación: x – 1 > 0

	$\boxed{x < 1}$		$\boxed{x > 1}$
$x - 1 = 0$			$(-\infty, +1)$
$(+1, +\infty)$		1	
$x = 1$			
Elegimos los valores:	x = 0		x = 2
	$x - 1 > 0$		$x - 1 > 0$
	0 – 1 = -1 < 0		2 – 1 = 1 > 0
	NO PERTENECEN AL DOMINIO		<u>SÍ PERTENECEN</u>

$$Dom(h) = \{x \in \Re / x - 1 > 0\} = (1, +\infty)$$

(Observemos que $1 \notin Dom(h)$_ porque h(1) = ln (1-1) = ln (0) que no existe)

(d) $k(x) = x^2 + x - 1$

El dominio de k es el conjunto de los números reales porque al tratarse de un polinomio, voy a poder realizar todas las operaciones indicadas (elevar al cuadrado, sumar o restar una unidad). No hay ,matemáticamente, ningún inconveniente.

$Dom(k) = \Re$

Vamos a resumir y a escribir en forma de **teoría** lo que hemos visto en los ejemplos anteriores:

(1) POLINOMIOS

El dominio de cualquier función polinómica es siempre el conjunto de los números reales: $\Re$

(2) FUNCIÓN RACIONAL

Una función racional es una función que es división de polinomios: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

$P(x), Q(x)$ polinomios

$$\boxed{Dom(f)=\Re-\{x\in\Re / Q(x)=0\}}$$

(3) FUNCIÓN RADICAL

Una función radical es una función que es raiz de índice " n " de otra función: $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$

Índice de la

$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$

radicando

El dominio dependerá de si el índice " n " es par o impar

$$\boxed{Dom(f)=\begin{cases} Dom(f)=Dom(g) & si \quad n\, es\, impar \\ Dom(f)=Dom(g)-\{x\in\Re / g(x)<0\} & si \quad n\, es\ par \end{cases}}$$

(4) FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Dada la función logarítmica: $f(x)=\log_a(g(x))$

$$\boxed{Dom(f)=Dom(g)-\{x\in\Re / g(x)\le 0\}}$$

EJERCICIOS: Calcula el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f_1(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$

(b) $f_2(x) = \sqrt[3]{x-1}$

(c) $f_3(x) = \sqrt{x^2-16}$

(d) $f_4(x) = \ln(x^2-2)$

(e) $f_5(x) = \sqrt[5]{\dfrac{x-3}{x}}$

(f) $f_6(x) = \sqrt{\ln(x^3-1)}$

(g) $f_7(x) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)$

(h) $f_8(x) = \log\left(\dfrac{2-x}{\sqrt{x+x^3}}\right)$

(i) $f_9(x) = \sqrt{\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-4}}$

(j) $f_{10}(x) = \sqrt{sen(x)}$

(k) $f_{11}(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

(l) $f_{12}(x) = \sqrt[3]{tg(x)}$

(m) $g(x) = \ln\left(\sqrt{8+x^2}\right)$