LÍMITES DE FUNCIONES

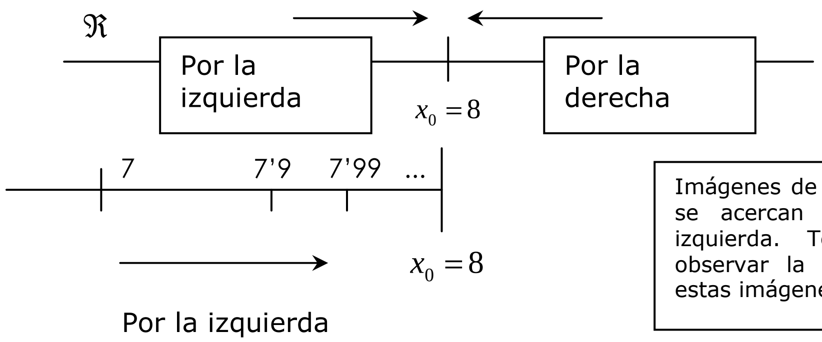
1.- <u>CONCEPTO DE LÍMITE</u>.

Vamos a intentar acercarnos al concepto de límite viendo un ejemplo. Utilizaremos la misma función que hemos construido en el tema de FUNCIONES: f (x) = 0'12 + 0'03 · x

Imagina que por alguna razón (eso ahora es lo menos importante) queremos conocer la imagen de un número x_0, por ejemplo $x_0 = 8$, es decir, queremos saber lo que nos va a costar una llamada de 8 minutos y por lo que sea no podemos calcularla directamente a través de la función.

Para solucionar este problema pretendemos estudiar lo que les pasa a <u>las imágenes de números que están cada vez más cercanos a</u> 8, observar la tendencia de esas imágenes, <u>hacia donde se aproximan</u>.

Estos números que están muy próximos a 8, cada vez más cerca de 8, forman lo que se llama un <u>entorno</u> de $x_0 = 8$. Tendremos que distinguir entre números muy cercanos a x_0 que sean más pequeños que x_0 (diremos entonces que <u>nos aproximamos a x_0 por la izquierda</u>) y números muy cercanos a x_0 que sean mayores que x_0 (diremos que <u>nos aproximamos</u> a x_0 <u>por la derecha</u>)



Imágenes de números que se acercan a 8 por la izquierda. Tenemos que observar la tendencia de estas imágenes

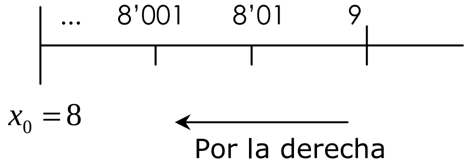
x	$f(x) = 0'12 + 0'03 \cdot x$	
7	$f(7) = 0'12 + 0'03 \cdot 7 = 0'33$	0'33
7'9	$f(7'9) = 0'12 + 0'03 \cdot (7'9) = 0'357$	0'357
7'99	$f(7'99) = 0'12 + 0'03 \cdot (7'99) = 0'3597$	0'3597
7'999	$f(7'999) = 0'12 + 0'03 \cdot (7'999) = 0'35997$	0'35997
7'9999	$f(7'9999) = 0'12 + 0'03 \cdot (7'9999) = 0'359997$	0'359997
7'99999	$f(7'99999) = 0'12 + 0'03 \cdot (7'99999) = 0'3599997$	0'3599997

Números más pequeños que 8, cada vez más cerca de 8.

Según se observa en la tabla que hemos construido, las imágenes de esos números que se acercan cada vez más a 8 (y que son más pequeños que 8) parece que se aproximan a 0’36.

Diremos entonces, que el límite de la función f(x) cuando las x se aproximan a 8 por la izquierda es 0’36

A este límite lo representaremos mediante el símbolo: $\boxed{\lim_{x \to 8^-} f(x) = 0'36}$



x	$f(x) = 0'12 + 0'03 \cdot x$	
9	$f(7) = 0'12 + 0'03 \cdot (9) = 0'39$	0’39
8’5	$f(7'9) = 0'12 + 0'03 \cdot (8'5) = 0'375$	0’375
8’1	$f(7'99) = 0'12 + 0'03 \cdot (8'1) = 0'363$	0’363
8’01	$f(7'999) = 0'12 + 0'03 \cdot (8'01) = 0'3603$	0’3603
8’001	$f(7'9999) = 0'12 + 0'03 \cdot (8'001) = 0'36003$	0’36003
8’0001	$f(7'99999) = 0'12 + 0'03 \cdot (8'0001) = 0'360003$	0’360003

Estamos tomando valores de la x, de la variable independiente, mayores que 8, pero que cada vez se van acercando más a 8. Estamos aproximándonos a 8 por su derecha

Son las imágenes de los valores de la x que se aproximan a 8 por la derecha. Tenemos que observar hacia que valor se acercan. Tenemos que observar su tendencia.

Según se observa en la tabla, a medida que tomamos valores que se acercan más a 8 (y que son mayores que 8), sus imágenes parece que se aproximan cada vez más a 0’36.

Diremos entonces, que el límite de f(x) cuando las x se aproximan a 8 por la derecha es 0’36.

Esto lo representaremos por el símbolo: $\boxed{\lim_{x \to 8^+} f(x) = 0'36}$

A estos límites por la derecha y por la izquierda los llamaremos **límites laterales**.

En este ejemplo, como hemos podido comprobar, los límites por la izquierda y por la derecha coinciden. Diremos entonces que existe el límite de f(x) cuando x tiende a 8 y que vale 0’36

$$\boxed{\lim_{x \to 8} f(x) = \lim_{x \to 8^+} f(x) = \lim_{x \to 8^-} f(x) = 0'36}$$

2.- **OPERACIONES CON LÍMITES. INDETERMINACIONES**.

El comportamiento del límite respecto de las operaciones con funciones es fácil de recordar, ya que pueden intercambiarse la operación (siempre que tenga sentido) y el límite.

OPERACIONES	PROPIEDADES
SUMA	$\lim_{x \to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$
OPUESTO	$\lim_{x \to x_0} (-f(x)) = -(\lim_{x \to x_0} f(x))$
DIFERENCIA O RESTA	$\lim_{x \to x_0} (f(x)-g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x)$
MULTIPLICACIÓN O PRODUCTO	$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$
INVERSA	$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} f(x)}$
COCIENTE O DIVISIÓN	$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$
MULTIPILCACIÓN POR UN Nº	$\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$
POTENCIA	$\lim_{x \to x_0} \left[(f(x))^{g(x)} \right] = \left[\lim_{x \to x_0} f(x) \right]^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

Un límite es DETERMINADO cuando, al calcular el límite de cada uno de los términos de la función, los resultados que aparecen tienen sentido según las operaciones de los números reales.

En caso contrario, se dice que el límite es **INDETERMINADO**.

El límite se calcula en este caso transformando la expresión de la función en otra equivalente en la que sí que tengan sentido las operaciones, como se verá en los ejercicios. Las indeterminaciones que nos podemos encontrar vienen resumidas en la siguiente tabla:

RACIONALES				
$\frac{k}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\infty - \infty$

EXPONENCIALES		
1^{∞}	∞^{0}	0^{0}

Vamos a indicar a continuación los resultados que se obtienen al operar algunos límites de funciones, ya sean límites finitos (números reales) o límites infinitos. Las celdas vacías se corresponden con operaciones que no tienen sentido, es decir, con indeterminaciones.

SUMA

+	a	$+\infty$	$-\infty$
b	a+b	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$

RESTA

-	a	$+\infty$	$-\infty$
b	a-b	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$		$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	

PRODUCTO

·	a	0	$+\infty$	$-\infty$
b	a·b	0	$+\infty$ si $b > 0$ $-\infty$ si $b < 0$	$-\infty$ si $b > 0$ $+\infty$ si $b < 0$
0	0	0		
$+\infty$	$+\infty$ si $a > 0$ $-\infty$ si $a < 0$		$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$ si $a > 0$ $+\infty$ si $a < 0$		$-\infty$	$+\infty$

COCIENTE

:	a	0	$+\infty$	$-\infty$	dividendo
b	$\frac{a}{b}$	0	$+\infty$ si $b > 0$ $-\infty$ si $b < 0$	$-\infty$ si $b > 0$ $+\infty$ si $b < 0$	
0			$\pm\infty$	$\pm\infty$	
$+\infty$	0	0			
$-\infty$	0	0			

divisor